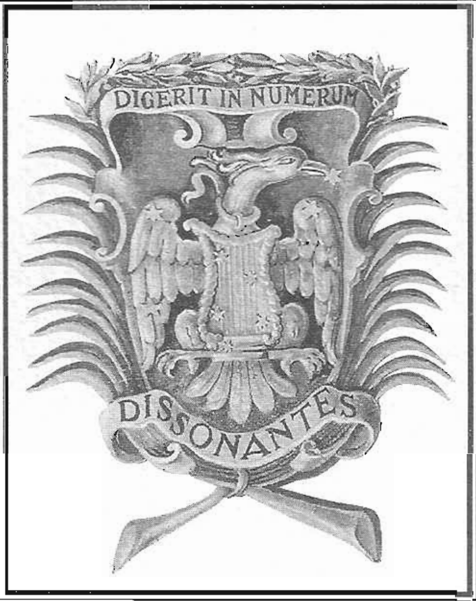
Accademia Nazionale di Scienze Lettere e Arti di Modena
(fondata nel 1683)
ATTI E MEMORIE

MEMORIE
SCIENTIFICHE, GIURIDICHE, LETTERARIE
SERIE VIII - VOL. VII - Fasc. II, 2004



MUCCHI EDITORE
Modena - 2004
Estratto

Acc. Naz. Sci. Lett. Arti di Modena
Memorie Scientifiche, Giuridiche, Letterarie
Ser. VIII, v. VII (2004), fasc. II

Carlo Felice Manara - Mario Marchi

GEOMETRIA: RIGORE E CREATIVITÀ

Parte prima: Intuizione e metodo

ABSTRACT

Looking at the history of Western Thought it seems well-founded to consider Greek Geometry and in particular the Euclide's work as the beginning of the Science, in the highest and modern meaning of the word. By that we mean precisely the beginning of a mental activity of research concerning knowledge and having clearness and certainty as a target. The development of this science follows a process starting from the concrete reality and consisting of an activity of abstraction and conceptualization following rigorous deduction rules. With the beginning of the Cartesian Thought the history of Mathematics has seen a new flourishing of geometric studies which follows from the introduction of new deduction procedures obtained by means of the use of suitable algebraic tools. This course of progress has had afterwords new moments of development with the use of algebraic structures of increasing abstract level. Such facts show that Geometry is not an old dying tree but, on the contrary, is still a strong alive being, bearing abundant fruits.

1. Un primo momento di queste mie considerazioni riguarda un fatto storico che mi sembra molto importante per il seguito, e cioè il fatto che il primo trattato scientifico nella storia dell'umanità, riguardante argomenti matematici, è il trattato degli *Elementi* di Euclide, che viene situato dagli storici in un'epoca attorno al 300 a.C.[1]

Con questo non pretendo di affermare che l'umanità non avesse co-

[1] La bibliografia riguardante Euclide e la sua opera è – comprensibilmente – molto vasta. Farò riferimento all'opera di Sir T.L.HEAT, *The thirteen books of Euclid's Elements*, opera che viene considerata come un classico nel campo in cui vorrei muovermi.

noscenze matematiche valide anche in precedenza: basti osservare certi monumenti che noi oggi ammiriamo, come le Piramidi egiziane, per convincersi che i loro architetti non potessero fare a meno di eseguire dei calcoli matematici; ma ciò che suscita la nostra stupita ammirazione per gli *Elementi* è, a mio parere, il fatto che quest'opera ha la struttura espositiva di un trattato rigoroso ed astratto, con un livello di astrazione che prescinde dall'ipotesi di eventuali applicazioni pratiche. E' noto che la procedura dell'esposizione segue un cammino che è diventato paradigmatico per le opere matematiche di tutta la storia umana seguente: tale cammino tocca anzitutto le proposizioni che vengono date per vere senza bisogno di dimostrazione, e procede poi per dimostrazioni rigorosa di ogni altra proposizione che si enuncia e si prende in considerazione.

Penso che non vi sia bisogno di ricordare qui per esteso le analisi che sono state fatte dagli storici della scienza e in particolare dagli studiosi dei fondamenti della matematica; mi permetto tuttavia di ricordare che tra le proposizioni enunciate senza dimostrazione ve ne sono cinque che vengono chiamate dall'autore stesso "richieste" (Postulati, nella formulazione latina classica, la quale riproduce con fedeltà il termine originale del testo greco); e tra di esse figura, al quinto posto, quella proposizione sulle rette parallele che è ormai conosciuta nelle formulazioni divulgative come "Postulato di Euclide" *tout court*; così come spesso viene chiamata sbrigativamente "di Geometria euclidea" una trattazione geometrica che non enunci esplicitamente un postulato diverso da quello euclideo, oppure da uno equivalente. Non intendo qui aprire una divagazione sulla questione del postulato euclideo, o sulla dottrina delle parallele. Il mio accenno alla questione è dovuto semplicemente alla volontà di ricordare un capitolo classico dello sviluppo del pensiero scientifico che ritengo di importanza fondamentale. Mi pare che questo mio giudizio sia confortato anche dalla storia del pensiero: storia che registra gli sforzi dei pensatori per raggiungere la certezza della costruzione dottrinale ed il rigore della esposizione.

Ed a proposito del rigore vorrei ricordare qui il titolo della classica opera di Benedetto Baruch Spinoza (1632-1677) *Ethica more geometrico demonstrata*, in cui l'espressione "more geometrico" vuole esprimere e richiamare, ovviamente, il rigore e la coerenza del discorso deduttivo. Ed è interessante anche osservare che questo filosofo, nel redigere l'opera in parola, ha seguito lo schema, a quel tempo classico nell'esposizione geometrica, enunciando definizioni ed assiomi e chiamando "teoremi" le proposizioni che egli dimostra.

Colgo l'occasione per ricordare l'ammonimento che lo stesso pensatore esprime in un'altra sua opera, *Tractatus theologico-politicus*:

> ... la semplice immaginazione non implica per sua natura alcuna certezza, quale è connessa invece ad ogni idea chiara e distinta, ma, per poter esser certi delle cose che immaginiamo, si deve necessariamente aggiungere qualche altra cosa, e cioè il ragionamento...

Non vorrei perdere qui l'occasione per ricordare un altro grande del pensiero umano, Blaise Pascal, il quale pure ha voluto citare lo "spirito" della geometria (inteso come attitudine al rigore del ragionamento) nel titolo di una sua opera che suona appunto *De l'esprit géométrique et de l'art de persuader*. Ed a proposito di B. Pascal vorrei notare anche la distinzione che egli fa ripetutamente tra "esprit de géométrie" ed "esprit de finesse". Espressione questa che, a mio parere, vorrebbe indicare la capacità di superare (senza abolirlo) il puro rigore formale della procedura adottata per conquistare il possesso delle verità più alte, ben superiori ai contenuti della geometria.[2]

Non intendo addentrarmi, qui ed ora, nel tentativo di analizzare su quali basi si sia fondata, nel corso della storia del pensiero, la convinzione del fatto che la geometria realizzi in modo quasi tipico e sistematico quella ricerca della chiarezza e della certezza che incontriamo spesso al fondo dei desideri del nostro animo. Vale tuttavia la pena di ricordare che anche nell'antichità classica vi fu chi emise delle valutazioni sulla sistemazione teorica della geometria. A questo proposito si potrebbe per esempio citare la polemica del filosofo e matematico Proclo, vissuto in Alessandria d'Egitto nel V secolo della nostra era, con i filosofi epicurei suoi contemporanei. Costoro sostenevano che

> ... la geometria è una scienza inutile, perché insegna delle cose che anche i somari conoscono. Infatti – dicevano – la geometria insegna, per esempio, che un lato di un triangolo è minore della somma degli altri due; ma questo fatto è noto anche agli asini, perché nessun somaro, per andare ad un mucchio di fieno, percorre due lati di un triangolo se può limitarsi a percorrere il terzo. Dunque, concludevano gli Epicurei, la geometria è la scienza dei somari.

La risposta del matematico fu che, se ci si limita al contenuto delle

---

[2] B. PASCAL, *Pensées et opuscules publiés par M. Léon Brunschvig*, Les classiques Hachette, p. 317, Section I. *Différence entre l'esprit de géométrie et l'esprit de finesse*.

informazioni, la scienza dell'uomo coincide, in questo caso, con quella del somaro. Ma la differenza essenziale sta nel fatto che l'uomo conosce il perché delle cose, e sa dimostrare con certezza che esse debbono stare in un certo modo e non possono sussistere diversamente.[3]

Invero, quale che fosse l'opinione dei critici greci, rimane a mio parere sempre vero il fatto che il trattato euclideo rappresenta il primo (e monumentale) esempio storico di esposizione che tende metodicamente a presentare la certezza dei propri enunciati mediante la loro dimostrazione logica.

Ora è noto che nella storia della nostra civilizzazione occidentale l'ambiente della ricerca, astratta e disinteressata, che ha fatto nascere questo tipo di certezza è quello della civiltà greca.

A questo proposito riporto qui il pensiero di uno studioso straniero, che, a mio parere, esprime molto bene anche il mio pensiero. Scrive per esempio Peter R. Cromwell:

> La caratteristica della matematica greca, che la distingue dalle culture precedenti, è la presenza della dimostrazione. Non è certo che le civilizzazioni precedenti alla greca sapessero formulare delle proposizioni che avessero carattere generale; ed in una qualunque cultura precedente la greca non vi sono tracce di alcuna procedura deduttiva, diretta a giustificare i metodi adottati. Nelle opere antiche di matematica incontriamo solamente delle descrizioni di procedure, talvolta presentate come successioni di esempi pratici. I Greci non soltanto enunciarono delle proposizioni generali, ma le accompagnarono con argomentazioni razionali per dimostrare la loro validità.[4]

Penso quindi che sia ben giustificata l'ammirazione che la matematica greca ha riscosso nei secoli; ed in particolare penso sia ben giustificata l'ammirazione per Euclide. E mi piace qui ricordare, a questo proposito, ciò che un nostro grande matematico, Vito Volterra, scrisse al dittatore che a quei tempi dominava il nostro Paese: «Cadono gli imperi, ma i teoremi di Euclide brillano di eterna giovinezza».

---

[3] I particolari sulla polemica si possono trovare in T.L.HEAT, *The thirteen books of Euclid's Elements, op. cit.*, book I, prop. 20.

[4] «The characteristic of Greek mathematics, which distinguishes it from that of earlier cultures is the notion of proof. It is uncertain whether early civilisations could even formulate propositions in a general context, and there are no traces of deductive arguments being used to justify methods in any pre-Hellenic culture. In all ancient mathematics there is just a description of a process , often given as a sequence of worked exemples. The Greeks non only stated general propositions, but furnished them with rational arguments to demonstrate their validity». (p. 29).

A conclusione di queste mie osservazioni sul livello intellettuale del pensiero greco vorrei aggiungere che esso non soltanto fu il terreno sul quale germogliò l'opera dei matematici, ma analizzò anche i problemi che riguardano la validità, la portata ed il significato delle procedure da loro impiegate: ed infatti già in Aristotele e poi nei matematici dell'epoca alessandrina troviamo codificate le due procedure di analisi e di sintesi che sono le strade maestre seguite dalla nostra mente per scoprire e per difendere la verità.

2. A questo punto ritengo sia lecito domandarsi che cosa intendiamo indicare con il termine "Geometria". La domanda potrebbe essere giudicata abbastanza legittima, anche se pone un problema di difficile soluzione, come cercheremo di mostrare; la legittimità della domanda potrebbe essere in qualche modo giustificata ricordando l'episodio biografico della vita di Blaise Pascal, che abbiamo già incontrato. Narrano i suoi biografi che il giovane genio ascoltava le discussioni che il padre (Étienne Pascal, per parte sua discreto cultore di matematica) conduceva con gli amici; in tali discussioni entrava molto spesso il termine "géométrie", termine del quale il giovane volle conoscere il significato. Alle sue domande insistenti egli ebbe finalmente risposta con la frase che indicava la geometria come « ... il mezzo per fare delle figure giuste e per trovare le relazioni che intercedono tra loro».[5]

Anche accettando la frase di Étienne Pascal come punto di partenza provvisorio per un'ulteriore analisi, penso che occorra non dimenticare, a questo proposito, il pensiero di Platone. Scrive infatti il filosofo:

> I geometri si servono di figure visibili e ragionano su di esse, ma non ad esse pensando, bensì a ciò di cui quelle sono le immagini, ragionando sul quadrato in sé, sulla diagonale in sé, e non su quelle che disegnano. Lo stesso si dice per tutte le figure che essi modellano o disegnano, di cui si servono come immagini (a guisa di ombre o di immagini riflesse sulle acque), cercando di vedere certe verità che non si possono vedere se non col pensiero.[6]

Si potrebbe prendere occasione da questo passo platonico per accennare ad altri tentativi di definire i contenuti di quella dottrina che tradi-

[5] « ... mon père (è la sorella di Pascal, Madame Périer, che scrive) lui dit en général que c'était le moyen de faire les figures justes , et de trouver les proportions qu'elles ont entre elles , et en même temps lui défendit d'en parler davantage, et d'y penser jamais ...»

[6] PLATONE, *Repubblica*, p. 510.

zionalmente, nel corso dei secoli di storia, è stata chiamata con il nome di "Geometria". A questo proposito mi pare particolarmente interessante ricordare la definizione della geometria come "Primo capitolo della fisica", mettendo così in evidenza lo stretto legame della dottrina con la manipolazione materiale degli oggetti che ci circondano; c'è anche chi ha notato che quella "fisica" di cui si parla nella frase citata potrebbe essere precisata dicendo che si tratta della Meccanica del corpo rigido. Ed invero, in certa trattatistica classica della Meccanica razionale, gli elementi della cinematica venivano anche presentati come "Geometria del movimento"; rimaneva ovviamente sottinteso che si trattava di movimento rigido; altri Autori distinguevano nelle loro trattazioni la nozione di "spostamento" da quella di "movimento". Distinzione che era giustificata dalla osservazione che al termine "spostamento" era attribuito un significato temporale, mentre con il termine "movimento" si intendeva coinvolgere nell'analisi scientifica dei fenomeni anche il tempo entro il quale gli spostamenti avvenivano.

3. Si potrebbe dire che la struttura gnoseologica della geometria classica, che abbiamo finora contemplata, fino al secolo XVII rimase sostanzialmente qual era stata impostata dalla matematica greca. Le procedure logiche erano state pure codificate dalla filosofia classica; questa aveva messo in evidenza i due momenti, quello detto "di analisi" e quello detto "di sintesi", in cui si articola il movimento della nostra mente per conquistare la conoscenza certa, che si presenta come tipica della geometria. La caratteristica che più vorrei prendere in considerazione a questo punto della mia esposizione mi pare il fatto che i due momenti, di analisi e di sintesi di cui ho detto poco sopra, venivano posti in essere con l'impiego della lingua comune, la quale forniva le parole e le frasi della deduzione certa. E vorrei aggiungere che nella presentazione delle conoscenze matematiche diverse da quelle che formavano i contenuti della geometria, in particolare delle conoscenze riguardanti l'aritmetica, la geometria forniva anche il linguaggio tecnico; questa circostanza mi pare importante e non una pura osservazione curiosa, ed è confermata per esempio dal fatto che Euclide, per dire che un numero a (intero naturale) ha come divisore un numero b (ovviamente pure intero naturale) si esprime dicendo che " b misura a ". E nell'impiego di questo modo di espressione mi pare di scorgere l'influenza che l'immagine geometrica esercitava su tutto il campo della matematica.

Tale situazione fu radicalmente mutata dall'irrompere sulla scena scientifica del pensiero di René Descartes (latinamente Cartesio). E' noto che la sua opera fondamentale, in questo ordine di questioni, viene ormai abitualmente richiamata con il titolo di "Discorso sul metodo".[7]

Non mi soffermo per il momento a riflettere sul cambiamento di panorama nel campo filosofico che quest'opera proponeva; mi limito a ricordare un'osservazione banale, e cioè che l'interesse dei ricercatori veniva richiamato non tanto sui contenuti della conoscenza scientifica, quanto sul metodo per conquistarli e possederli con certezza. In altri termini, vorrei sottolineare l'aspetto della rivoluzione cartesiana che riguarda la linguistica (prendendo questo termine in senso lato): in particolare nei riguardi della geometria, la rivoluzione cartesiana si è concretizzata con l'invenzione di un sistema di convenzioni, che permettono di passare dalla trattazione dei contenuti con il linguaggio comune, alla loro rappresentazione con il linguaggio dei numeri ed alla deduzione ricondotta all'applicazione formale delle leggi dell'algebra.

Occorre tuttavia ricordare che questa rivoluzione linguistica è stata resa possibile proprio dallo sviluppo dell'algebra, che ha fornito a Descartes gli strumenti formali e simbolici, le procedure ed i concetti per l'impiego dei numeri per rappresentare gli enti della geometria. Il fatto che questi metodi abbiano ricevuto in seguito il nome di "Geometria analitica" dimostra – a mio parere – che l'impianto logico e metodologico della geometria antica (con i relativi momenti di "analisi" e "sintesi") non era stato ripudiato; anzi era stato valorizzato dall'impiego dei nuovi mezzi linguistici offerti dal progresso dell'algebra.

Non mi soffermerò a ripetere qui le analisi storiche relative ai progressi nella ricerca matematica resi possibili dall'impiego dei nuovi metodi. Ma non posso trascurare di ricordare che la scoperta di nuovi enti geometrici e di nuovi "luoghi" ha portato anche alla nascita di nuovi metodi per la soluzione di problemi geometrici. Ed ha condotto alla nascita di nuovi rami, impiantati sul robusto tronco della geometria classica.

Tra questi vorrei qui ricordare quelli che a me appaiono come i più classici: la geometria algebrica e la geometria differenziale; su di essi vorrei ritornare in seguito a riflettere: ma non voglio dimenticare anche la nascita di nuovi concetti, come quello di "iperspazio", che ha fornito un notevole appoggio concettuale anche ad altri domini dell'universo matematico.

---

[7] *Discours de la Méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences. Plus La Dioptrique, Les Météores, et La Géométrie. Qui sont des essais de cete Méthode*. A Leyde MDCXXXVII (1636).

Il cambiamento di prospettiva generato dalle intuizioni e dalle invenzioni di cui siamò debitori al genio di Descartes ha stimolato la creatività dei matematici nella ricerca e nella creazione di sempre nuovi strumenti, concettuali e simbolici.

Qui vorrei ricordare le idee di un matematico italiano, Giuseppe Peano (nato a Cuneo nel 1858 e morto a Torino nel 1932), il quale elaborò un "Calcolo geometrico"; una trattazione rigorosa delle nostre esperienze spaziali idealizzate (quelle appunto che fondano la geometria) in cui l'impiego dei concetti e delle procedure dell'algebra è ottenuto in modo che si potrebbe chiamare "diretto", senza passare attraverso l'intermediazione della scelta di sistemi di riferimento e quindi di coordinate.

E' noto che il problema dello svincolarsi dagli elementi estranei è stato affrontato e risolto anche in modi diversi, e ciò si riannoda alle possibili osservazioni riguardanti la estraneità (in linea di principio) del sistema di riferimento dai problemi che vengono trattati con le convenzioni cartesiane. A questo proposito penso che sia importante ricordare qui il "Calcolo differenziale assoluto", iniziato dal nostro Gregorio Ricci Curbastro e sviluppato da Tullio Levi Civita; è appena necessario ricordare che le loro idee, e gli algoritmi che le realizzano, sono strettamente connesse con il "Calcolo tensoriale", che ha avuto tante utili applicazioni nella tecnica (per esempio nella soluzione di problemi di ingegneria, legati a questioni di elasticità).

4. Poco fa ho cercato di presentare un aspetto della rivoluzione che Cartesio ha provocato nella geometria tradizionale: precisamente ho cercato di mettere in luce la novità linguistica operata dall'adozione dell'algebra come strumento per rappresentare gli oggetti della geometria, e soprattutto l'adozione dei metodi algebrici come strumenti per la deduzione.

Questo movimento intellettuale si sviluppò ulteriormente, soprattutto del secolo XIX, con la nascita di quella che oggi chiamiamo la geometria proiettiva; il cui iniziatore, Jean Victor Poncelet, mise le basi della celebre sistemazione teorica che Felix Klein compì, utilizzando una struttura algebrica: quella di gruppo, impiegata in particolare nella sua realizzazione sotto la forma di "gruppo di trasformazioni".

Per presentare, sia pure in modo sommario, l'opera di Poncelet si potrebbe dire che, nell'ambito dei metodi classici della Geometria, si accettava tacitamente che le proprietà delle figure studiate non variassero quando le figure stesse venivano spostate con una qualunque operazione che appartenesse all'insieme dei "movimenti rigidi". Utilizzando il vocabolario oggi divenuto abituale, si potrebbe dire che le proprietà delle figure studiate erano considerate *invarianti* per movimenti rigidi: quando si fosse dimostrata valida una certa proprietà per una determinata figura, quella stessa proprietà veniva considerata valida per ogni altra figura che si potesse ottenere dalla prima spostandola rigidamente, o ingrandendo la prima "in scala", cioè trasformandola in una figura simile. Il titolo che Poncelet diede alla sua opera fondamentale, *Traité des propriétés projectives des figures*, mostra che questo geometra amplia sostanzialmente l'insieme delle operazioni con le quali egli immagina di poter trasformare le figure studiate, ammettendo di trasformarle anche con operazioni che non appartengono all'insieme dei movimenti rigidi o delle similitudini. Questa idea si rivelò molto vitale, e, come ho anticipato poco sopra, le sue conseguenze furono formalizzate da Felix Klein, che la inquadrò in un capitolo fondamentale dell'Algebra astratta: la Teoria dei gruppi di trasformazioni.

Riprendendo le osservazioni esposte a proposito delle idee di Cartesio sono portato a dire che, ancora una volta, si è verificato un ampliamento del "linguaggio" della Geometria, dando anche qui al termine linguistico il significato di insieme di strumenti teorici di rappresentazione dei concetti e di operazioni deduttive.

5. Per avviare a conclusione questa mia sommaria meditazione sul posto che la geometria tiene nell'ambito del pensiero matematico, vorrei riattaccarmi al pensiero di Spinoza che ho citato prima, e precisamente alla critica formulata da quel filosofo a proposito dell'insufficienza dell' immaginazione, ed alla necessità del ragionamento nella ricerca della certezza e della verità.

Ritengo infatti che sia stata talvolta rilevata un'eccessiva fiducia che i cultori di geometria mostrano nell' immaginazione. In particolare, per esempio, vorrei ricordare il concetto di "continuità" il quale è stato talvolta erroneamente invocato da qualche autore come un fondamento logico del ragionamento; concetto che appare chiaramente radicato nelle nostre sensazioni, e che è stato chiarito formalmente dagli sviluppi dell'Analisi matematica classica.

Vorrei tuttavia ricordare che l'esistenza della moderna "Geometria frattale" dimostra come, anche partendo dal complesso delle nostre sensazioni, sia possibile affidare la ricerca della certezza al ragionamento rigoroso.

E qui mi è caro ricordare che il superamento critico dei dati sensoriali e delle loro incaute generalizzazioni è dovuto alla creatività di Giuseppe Peano, il quale, con il celebre esempio di "curva che riempie un quadrato" potrebbe essere considerato come il creatore del primo frattale della storia della matematica.

6. Penso che non ci sia migliore conclusione di questo mio discorso che ricordare e parafrasare il detto di Vito Volterra, che ho già citato:

> Muoiono gli uomini e cadono gli imperi, ma i teoremi della Geometria brillano di eterna giovinezza.

Carlo Felice Manara

RIASSUNTO

A chi rifletta sulla storia del pensiero occidentale appare ragionevole il considerare la Geometria greca, e in particolare l'opera di Euclide come l'inizio della scienza, nel senso più alto e moderno del termine: precisamente l'inizio di un'attività intellettuale di ricerca ella conoscenza, che mira alla chiarezza e alla certezza, e che è disinteressata (almeno in linea di principio generale); essa si sviluppa secondo un processo che parte dalla osservazione della realtà sperimentale, si serve della astrazione e della concettualizzazione, e soprattutto della deduzione rigorosa.
La storia della Matematica, con l'avvento del pensiero cartesiano, ha registrato una rinnovata fioritura della ricerca geometrica; fioritura che si può attribuire non alla rinuncia degli ideali fondanti, ma all'introduzione (in certa misura rivoluzionaria) di nuove procedure di deduzione, con l'impiego degli strumenti forniti dall'Algebra e messi al servizio della Geometria dal genio di Descartes.
Questo cammino di progresso ha visto in seguito altri episodi di sviluppo, con l'adozione di strumenti presi da strutture algebriche sempre più astratte. Il che dimostra che, nella folta foresta intellettuale costituita dalla Matematica di ogni tempo, la Geometria non è un vecchio tronco ormai avviato alla decadenza definitiva (come vorrebbero alcuni giudizi forse lievemente frettolosi) ma è ancora un robusto essere vivente, che continua a portare i suoi frutti.

Parte seconda: L'algebrizzazione del piano assoluto

A Edi.
A mia moglie,
nel ricordo del suo
indimenticabile
luminoso sorriso.
(8 aprile 2004)

ABSTRACT

Geometry, rationalization of the most commune experiences arising from the phisical space in which we live, is a science which uses a language where the level of abstraction and formalization is increasing together whit the critical reflection and the deepening of the knowledge of the subject.
Cartesian coordinates and, after them, the more abstract notion of vector space and linear algebra, are the natural tools to describe the elementary Euclidean Geometry. Furthermore the hyperbolic non-euclidean geometry may be described by means of a more abstract algebraic structure which is known by the name of "K-loop" and is a natural evolution of the notion of vector space.
In this paper the notion of K-loop will be introduced in an elementary way and it will be discussed how this tool can be useful in order to describe the non-euclidean hyperbolic space.

1. *Introduzione*

La geometria, razionalizzazione delle più comuni esperienze sensoriali che provengono dal mondo fisico di cui facciamo parte, si sviluppa secondo un processo che, partendo dalla osservazione della realtà sperimentabile, e attraverso opportune procedure di astrazione, giunge, mediante un esercizio di deduzione rigorosa, ad una concettualizzazione astratta e generale.

Il linguaggio attraverso il quale si esprime questo processo deduttivo, non è scelto e stabilito una volta per tutte, ma al contrario subisce anch'esso una propria evoluzione al crescere della riflessione critica e dell'approfondimento conoscitivo della disciplina.

Un esempio di tale processo evolutivo si può riconoscere guardando allo sviluppo del livello di astrazione e di formalizzazione presentato dal linguaggio che descrive la costruzione concettuale della geometria

elementare: in primo luogo la geometria euclidea e successivamente le geometrie non euclidee.
Invero le coordinate cartesiane, e successivamente le nozioni più astratte di spazio vettoriale e algebra lineare, costituiscono lo strumento formale naturale per la descrizione della geometria euclidea elementare. La geometria non euclidea iperbolica è invece razionalizzabile con uno strumento algebrico più astratto, noto con il nome di "k-loop", che della nozione di spazio vettoriale costituisce una naturale evoluzione concettuale.

Nel seguito verrà introdotta in modo elementare la nozione algebrica di "k-loop" esaminando la sua adeguatezza nella descrizione della geometria assoluta, geometria che di quella non-euclidea iperbolica costituisce la naturale generalizzazione.

2. *Il piano euclideo e le coordinate cartesiane*

2.1 La più semplice e naturale rappresentazione simbolica formale del piano euclideo è offerta dal ben noto *sistema di coordinate cartesiane.*

Esso costituisce un esempio illuminante di facile comunicabilità per illustrare quella particolare chiave di lettura della disciplina matematica a cui ci si riferisce parlando della *matematica come linguaggio.* L'idea è classica, e si può dire che risalga a Galileo,[1] ma con lo svilupparsi della disciplina matematica, anzi con il nascere della astrattezza ma anche della potenza del suo formalismo, sembra diventare sempre più attuale e verificabile.

Il *metodo delle coordinate* (in particolare le *coordinate cartesiane*) offre l'esempio di un linguaggio che fa uso del semplicissimo formalismo dell'algebra elementare, quello delle equazioni e sistemi di primo e secondo grado, o poco di più. Con questo facile strumento è possibile descrivere in modo preciso ed esauriente tutto quel ramo della geometria noto come *geometria (euclidea) elementare*, che è oggetto del primo approccio alla geometria, a partire dalla scuola liceale in poi.

L'espressione *descrivere la geometria* potrebbe forse fare pensare ad una procedura di semplice *denotazione* attraverso la quale differenti en-

[1] «... la filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua e conoscere i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.» G. GALILEI (1564-1642), *Il Saggiatore*.

ti geometrici, come possono essere punti, rette, angoli, e così via, vengono denominati mediante opportuni enti algebrici che in modi adeguati li caratterizzano. Quando invece si dice che "il linguaggio dell'algebra (elementare) descrive un certo ramo della geometria" si intende qualcosa di molto più impegnativo. La descrizione è infatti tale che le operazioni che si possono compiere tra enti geometrici (determinare la retta passante per due punti, intersecare due rette, determinare un luogo di punti, e così via) si traducono anche in corrispondenti operazioni funzionali che coinvolgono i relativi enti algebrici associati. In questo modo è possibile veramente investigare le proprietà degli enti geometrici studiati, operando a proprio piacimento su due differenti piani: uno, per così dire intrinseco, mediante gli strumenti della argomentazione logica naturale svolta a partire dalla caratterizzazione assiomatica degli oggetti indagati, l'altro, più formale e in sostanza ancora più astratto, che utilizza il linguaggio algebrico con le sue regole formali come se fosse un procedimento argomentativo, realizzando così in un certo modo l'antico sogno profetico di Leibniz.[2] Naturalmente sarà compito dello Studioso non solo scegliere il piano più adatto sul quale svolgere il procedimento argomentativo, ma confrontare anche fra loro gli eventuali risultati che si fossero ottenuti operando sui differenti piani, e questo al fine di controllare se mai le diverse procedure razionali avessero introdotto delle conclusioni che non dipendono dalla natura propria del problema, ma al contrario sono solamente conseguenza delle leggi logiche intrinseche del procedimento utilizzato.

La procedura di indagine scientifica che è stata ora abbozzata ha una validità generale che riguarda tutti i campi in cui il linguaggio della matematica è utilizzato per descrivere e per trattare i rami più diversi delle differenti discipline scientifiche e tecnologiche. L'esempio offerto dalle coordinate cartesiane e dalla geometria elementare è forse, come si è già affermato, il più semplice e intuibile, e questo tra l'altro spiega e giustifica pienamente il suo inserimento anche nei primissimi livelli scolari della educazione matematica. Naturalmente al crescere della complessità operativa oppure logico-concettuale dell'oggetto da rappresentare, corrisponderà un equivalente sviluppo delle proprietà e delle leggi sintattiche dello strumento formale che costituisce il linguaggio matematico.

[2] « ... pertanto, quando vi fossero delle divergenze di opinione. non sarà necessario fare delle discussioni tra dotti, non più di quanto esse siano necessarie tra due esperti di computisteria. Basterà infatti *sedersi ad un tavolo con la penna in mano* (chiamando, se si vuole, un amico ad assistere) *e dire: "calcoliamo"* ... » G.W. LEIBNIZ (1646-1716), «Scientia Generalis-Characteristica» 14 (1677).

Quella che si intende qui sviluppare è una analisi esemplificativa ed emblematica di come si possa interpretare la evoluzione delle coordinate cartesiane secondo strumenti algebrici di crescente complessità e astrattezza, al crescere della riflessione critica sui fondamenti della geometria che prende l'avvio dai primi elementi della geometria elementare.

2.2 Sia dunque $\sum:=(P,R,\omega,\equiv,//)$ un *piano euclideo,* che possiamo pensare assegnato mediante il classico *sistema di assiomi di Hilbert.*[3] Con P indicheremo dunque l'insieme dei *punti* del piano, con R l'insieme delle *rette,* con ω la *relazione d'ordine* (quella cioè che permette di introdurre le nozioni di *segmento, semiretta, angolo, semipiano* con le loro proprietà naturali), con "$\equiv$" la relazione di *congruenza* (tra segmenti e angoli) e infine con "//" la classica *relazione di parallelismo* tra rette, soddisfacente al ben noto assioma di *esistenza e unicità della parallela per un punto ad una retta assegnata* (il cosiddetto *postulato di Euclide*!).

Sia ora $(K,+;\ )$ un *campo*, che supporremo *ordinato* e nel quale la somma di due quadrati è ancora un quadrato. Un tale campo viene detto *pitagorico*; ne costituisce un esempio il campo R dei numeri reali ma, più semplicemente, il campo A dei numeri algebrici.

Un *sistema di coordinate cartesiane* su $\sum$ è una legge che stabilisce una corrispondenza biunivoca tra l'insieme P dei punti di $\sum$ e l'insieme K^2 delle coppie (ordinate) di elementi di K, associando ad ogni punto p di P la coppia di numeri (x,y) che sono le ascisse[4] delle proiezioni di p su una coppia prefissata e opportuna di rette X,Y. Tali rette costituiscono il cosiddetto *sistema di riferimento* e il punto $\underline{0}$, intersezione di X ed Y, è detto *origine* del sistema di riferimento. Per semplicità di rappresentazione indicheremo con $(\underline{0},X,Y)$ il sistema di coordinate e scriveremo: $p=(x,y)$, $(x,y) \in K^2$, $\underline{0}:=X \cap Y$; i numeri x,y vengono detti *coordinate* di p.

E' noto che le rette R di R possono essere rappresentate come l'insieme dei punti p le cui coordinate x,y soddisfano una equazione di primo grado su K (detta *equazione della retta*) del tipo $ax+by+c=0$.

Con un simbolismo che fa ricorso al linguaggio della teoria degli insiemi esprimeremo questo fatto scrivendo:

$$\text{[1]} \qquad R=\{(x,y)\in K^2 \mid ax+by+c=0\}$$

---

[3] D. HILBERT; *Grundlagen der Geometrie.* Ed. it.: *Fondamenti della geometria*; C.F. MANARA, *Introduzione*, Feltrinelli, Milano 1970.

[4] G. CASTELNUOVO, *Lezioni di Geometria Analitica*, Soc. Editrice Dante Alighieri, Roma 1909.

essendo $a,b,c \in K$, non tutti nulli.

In tal modo mediante relazioni di 1° grado su K si possono esprimere i più elementari fatti della geometria come ad esempio l'intersezione tra rette, il parallelismo, la perpendicolarità e così via.

Analogamente si possono esprimere le trasformazioni geometriche su $\sum$, in particolare le *isometrie* (o congruenze) e tra queste le *traslazioni*. Una traslazione τ su $\sum$ è una trasformazione (o biiezione) definita sull'insieme P dei punti, che non ha punti uniti e per la quale inoltre l'immagine di ogni retta R di R è ancora una retta, parallela alla retta originaria. Nel seguito indicheremo con T la totalità delle traslazioni su $\sum$, comprendendo tra queste anche la trasformazione identica. In simboli denoteremo questi fatti scrivendo:

$$\tau \in Sym(P);\ Fix(\tau) = \emptyset;\ \forall \mathrm{R} \in R : \tau(\mathrm{R}) \in R \text{ e } \tau(\mathrm{R}) \,//\, \mathrm{R}.$$

In un sistema di coordinate cartesiane una traslazione τ si può rappresentare con un sistema di equazioni del tipo

$$[2] \qquad \tau : \begin{cases} x' = x_0 + x \\ y' = y_0 + y \end{cases}$$

che significa

$$[3] \qquad \tau : \begin{cases} P = K^2 \to K^2 = P \\ p = (x, y) \to (x', y') := (x_0 + x, y_0 + y) = \tau(p). \end{cases}$$

Tale traslazione è univocamente individuata dal punto $t := (x_0, y_0) := \tau(0,0) = \tau(\underline{0})$cioè dall'immagine attraverso τ del punto $\underline{0} = (0,0)$ origine del sistema di riferimento.

3. *La nozione di spazio vettoriale*

3.1 La rappresentazione del piano euclideo $\sum$ realizzata ricorrendo ad un sistema di coordinate cartesiane è del tutto soddisfacente, come si è già notato, per affrontare i primi problemi della geometria elementare.

Questo metodo di rappresentazione presenta però il difetto che introduce, per ragioni funzionali, elementi arbitrari di dissimetria che non hanno a priori alcun significato dal punto di vista dei problemi geometrici affrontati. Tali sono precisamente gli elementi geometrici legati al sistema di riferimento, come ad esempio la posizione, la direzione e il verso degli assi X,Y, oppure ancora il particolare sistema di ascisse su essi fissato. Da tale sistema dipendono poi, in particolare, anche le proprietà del campo K con gli elementi del quale vengono espresse le coordinate.

L'idea che si rivela interessante per superare questa difficoltà può essere allora quella di rappresentare il piano euclideo con uno strumento algebrico più sofisticato, per il quale gli elementi geometricamente privilegiati sono ridotti al minimo e in cui quindi la rappresentazione algebrica degli enti geometrici da studiare non è fatta in riferimento al sistema di riferimento ma solo basandosi su specifiche proprietà sintattiche formali dello strumento algebrico che formalizza tale rappresentazione.

Lo strumento algebrico di cui stiamo parlando è ben noto e non è altro che lo *spazio vettoriale* (V, K)[5] su un campo K opportuno.

Il modo più semplice per far "evolvere" il concetto di "sistema di coordinate cartesiane" a quello di "spazio vettoriale" può forse consistere nell'introdurre nell'insieme P dei punti una legge di composizione, definita in modo da essere "compatibile" con le proprietà geometriche più significative, come ad esempio l'allineamento di punti o il parallelismo di rette.

Operando in modo adeguato, in un piano euclideo $\sum$ si può ottenere che l'insieme P divenga un *gruppo* $(P,+)$, rispetto ad una opportuna operazione additiva "+" definita sui punti.

Sulla base poi di altre immediate proprietà del piano $\sum$ si può introdurre la nozione di *prodotto* tra i punti di P e gli elementi (i numeri!) di un opportuno campo K in modo tale che $(P,+)$ divenga *spazio vettoriale su K*, assumendo P il ruolo di insieme dei *vettori*; scriveremo in simboli: (P,K).

3.2 Per introdurre dunque una adeguata operazione "+" di *somma* tra i punti del piano $\sum$ si può procedere in maniera molto naturale nel modo seguente.

Come si è visto dalle formule [2] e [3] ogni punto p di $\sum$ può essere

[5] Per la nozione di *spazio vettoriale*, con le sue principali proprietà, si veda ad esempio: L. LOMBARDO-RADICE, *Istituzioni di algebra astratta*, Feltrinelli, Milano 1965.

pensato come immagine di un punto prefissato $\underline{0}$ (che si può per comodità pensare coincidente con la origine di un eventuale sistema di riferimento) attraverso una traslazione τ appropriata. Questa proprietà sussiste indipendentemente dalla esistenza del sistema di riferimento prefissato ma caratterizza invece, assieme ad altre proprietà, la totalità T delle traslazioni del piano euclideo $\sum$. Si esprime questo fatto dicendo che *T è transitivo*, anzi più precisamente, *è regolare*, su P. Se conveniamo di considerare tra le traslazioni anche la traslazione identica, cioè di equazioni $\{x'=x, y'=y$, potremmo scrivere la proprietà ora detta nella forma:

$$P = T(\underline{0}) := \{\tau(\underline{0}) \in P \mid \tau \in T\}.$$

Ripetiamo, per chiarezza, che quanto abbiamo scritto non dipende dal sistema di riferimento precedentemente scelto, il cui ruolo dunque è solamente quello di permettere di riconoscere la proprietà di regolarità dell'insieme T, che ci interessa.

Occorre ricordare a questo punto che l'insieme T delle traslazioni di $\sum$, rispetto alla operazione "$\circ$" di composizione (applicazione successiva) di trasformazioni, costituisce un gruppo commutativo che indicheremo $(T, \circ)$. Questo significa che se τ_1 e τ_2 sono due qualsiasi traslazioni di T la loro composizione $\tau_2 \circ \tau_1$ è ancora una traslazione, τ_3 di T, che in modo suggestivo chiameremo *traslazione somma.* Se i punti p_1 e p_2 sono rispettivamente le immagini dal punto $\underline{0}$ attraverso τ_1 e τ_2, viene naturale pensare ad un punto p_3, da chiamare *somma* dei punti p_1 e p_2, ponendo:

[4] $$p_3 := \tau_3(\underline{0}) := (\tau_2 \circ \tau_1)(\underline{0}) = \tau_2(\tau_1(\underline{0})) =: p_2 + p_1 .$$

E' immediato verificare che la figura di $\sum$ con vertici ($\underline{0}$, p_1, p_3, p_2) risulta essere un *parallelogramma*; per tale ragione la somma di due punti espressa dalla [4] viene anche detta "*regola del parallelogramma*". L'insieme P, attraverso la [4], viene dunque dotato, come si desiderava, di una legge di composizione interna, che chiameremo *somma,* indicheremo con il simbolo "+" e di cui il punto $\underline{0}$ costituisce l'*elemento neutro*. Scriveremo: $(P,+)$. Con un semplice calcolo si dimostra che $(P,+)$ è un gruppo, commutativo, isomorfo a $(T, \circ)$.

Si può ora verificare che il gruppo $(P,+)$ fornisce una rappresentazione adeguata del piano $\sum$.

La nozione di somma assegnata in P mediante la [4], permette di definire un insieme di trasformazioni di P in sè ponendo, per ogni a di P:

[5] $$a^+ : \begin{cases} P \to P \\ x \to a^+(x) := a + x. \end{cases}$$

Indicheremo con $P^+ := \{ a^+ \mid a \in P \}$ l'insieme di tali trasformazioni; evidentemente risulta: $\underline{0}^+ = id$ (trasformazione identica) elemento neutro e $(P^+, \circ)$ gruppo isomorfo a $(P,+)$.

Dalle [4] e [5] risulta subito che, se τ è una traslazione di T tale che $a := \tau(\underline{0})$, per ogni punto x di P denotato da $x := \xi(\underline{0})$ si può scrivere

$$\tau(x) = \tau(\xi(\underline{0})) = (\tau \circ \xi)(\underline{0}) = a + x = a^+(x)$$

e dunque $a^+ \in T$. Ne consegue che

[6] $$(P^+, \circ) = (T, \circ).$$

La [6] e l'operazione di somma definita dalla [4] permettono di assegnare una elegante rappresentazione dell'insieme R delle rette di $\sum$.

Sia, per definizione

$$R_0 := \{ \mathrm{R} \in R \mid \underline{0} \in \mathrm{R} \}$$

ne consegue allora

$$R = \{ a + \mathrm{R} \mid a \in P, \mathrm{R} \in R_0 \}.$$

Sempre dalle proprietà [4] e [6] discende che l'insieme dei punti di una qualsiasi retta R di R_0 è chiuso rispetto l'operazione di somma ed R costituisce quindi un sottogruppo (R,+) di $(P,+)$.

4. *La geometria assoluta*

4.1 L'approfondimento critico della nozione di piano euclideo ha portato, come è ben noto, alla creazione (o, se si preferisce, alla scoperta, secondo le convinzioni epistemologiche di ciascuno) delle cosiddette *geometrie non-euclidee.*[6] Tra esse quella che meno si discosta dalla geometria euclidea classica è la cosiddetta *geometria non-euclidea iperbolica* per la quale valgono tutte le proposizioni iniziali (assiomi) della geometria euclidea ad esclusione dell'assioma della parallela sostituito invece con l'assioma (detto anche *assioma di Lobacevskij*): «*data una retta* R *e un punto p esterno ad* R, *nel piano definito da p ed* R *esistono almeno due rette distinte* S,T *che passano per p e non incontrano la* R».

Le proprietà comuni alla geometria euclidea e alla geometria non-euclidea iperbolica costituiscono la cosiddetta "*geometria assoluta*".[7]

Chiamiamo dunque *piano assoluto* una struttura $\Pi := (P, R, \omega, \equiv)$ in cui $P, R, \omega, \equiv$, sono caratterizzati come nel piano euclideo $\sum$ (cfr. § 2.2) senza che sussista tuttavia l'assioma euclideo della parallela.

Ci si può prospettare a questo punto il problema di rappresentare il piano assoluto Π con uno strumento formale adeguato, per rispondere alle esigenze già illustrate nel § 2.1 a proposito del piano euclideo. Tuttavia le procedure già illustrate nei § 2.2 e 3.2 e valide per il piano euclideo, non risultano immediatamente riproducibili nel piano assoluto poiché manca tutto quell'insieme di nozioni che è in ultima analisi conseguenza dell'assioma della parallela. In particolare la procedura indicata al § 3.2 per assegnare struttura di gruppo $(P,+)$ all'insieme P dei punti del piano euclideo $\sum$ è basata su proprietà del gruppo $(T, \circ)$ delle traslazioni che sono a loro volta classicamente deducibili in modo diretto dalle proprietà euclidee del parallelismo. Se si vuole invece estendere una tale procedura dal piano euclideo $\sum$ all'insieme P dei punti del piano assoluto Π, può essere opportuno prima costruire la struttura $(P,+)$ in $\sum$ senza fare esplicito ricorso alla nozione di parallelismo. Sarà allora più facile ripetere poi una analoga costruzione di $(P,+)$ in Π, confrontando quali proprietà si indeboliscono nella struttura algebrica $(P,+)$ in relazione al generalizzarsi delle proprietà geometriche passando da $\sum$ a Π.

5. *Le riflessioni di punto come generatori delle isometrie*

5.1 Le traslazioni, che hanno svolto un ruolo essenziale nelle procedure illustrate nei § 2.2 e 3.2, costituiscono una classe di particolari isometrie del piano euclideo. Si deve ora osservare che la nozione di i-

---

[6] Per un inquadramento storico-epistemologico del problema si veda per es. C.F. MANARA, *Introduzione*, in *op. cit.* in nota 3.

[7] Si veda ad esempio E. AGAZZI, D. PALLADINO, *Le geometrie non euclidee e i Fondamenti della Geometria*, Ed. La Scuola, Brescia, 1998, cap. III.

sometria può essere introdotta sia nel piano euclideo sia in quello assoluto. Ricercheremo allora, in questo paragrafo, le proprietà comuni che le isometrie presentano in entrambe queste topologie di piani. Nei paragrafi successivi utilizzeremo tali proprietà comuni, oltre a quelle specifiche dei relativi piani, per costruire la struttura $(P,+)$ e riconoscerne le diverse proprietà sia in $\sum$ che in Π.

Sia dunque $(P,R,\omega,\equiv)$ un piano assoluto. Si chiama *isometria* una biiezione di P in sé tale che l'immagine di una retta è ancora una retta e inoltre sono conservate le relazioni d'ordine (cioè ω) e di congruenza (cioè $\equiv$). Indicheremo con M il *gruppo delle isometrie* di Π.

Una classe particolarmente importante di isometrie è costituita dalle *riflessioni* (o *simmetrie*) *di retta*.[8] Se R è una generica retta di R, indicheremo con $\tilde{\mathrm{R}}$ la riflessione che ha R come asse di simmetria; il simbolo $\tilde{R}$ indicherà la totalità delle riflessioni di retta. L'importanza delle riflessioni di retta è dovuta al fatto che $\tilde{R}$ costituisce un insieme di generatori del gruppo M. Più precisamente si ha:[9]

$$\mathrm{M} = \tilde{R} \circ \tilde{R} \cup \tilde{R} \circ \tilde{R} \circ \tilde{R}.$$

Un'altra classe di isometrie avente una importanza cruciale è offerta dalle *riflessioni* (o *simmetrie*) *di punto*. Se a è un generico punto di P la corrispondenza $\tilde{a}$ definita da:

$$[7] \qquad \tilde{a}: \begin{cases} P \to P \\ x \to \tilde{a}(x) := \begin{cases} a, & \text{se e solo se } x = a \\ x' \in \overline{a,x},\ x' \neq x,\ (x',a) \equiv (a,x) & \text{se } x \neq a \end{cases} \end{cases}$$

è un'isometria involutoria. Si dimostra facilmente[9] che le riflessioni di punto sono *isometrie dirette* cioè, se $\tilde{P} := \{\tilde{a} \in \mathrm{M} \mid a \in P\}$,

$$\tilde{P} \subseteq \mathrm{M}_{+} := \tilde{R} \circ \tilde{R}.$$

Le proprietà enunciate dal seguente teorema avranno nel seguito un ruolo fondamentale.

---

[8] Si veda per es. H. KARZEL, K. SÖRENSEN, D. WINDELBERG, *Einführung in die Geometrie*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1973, cap. IV, §17 .

[9] Si veda per es. il riferimento indicato in nota 8.

TEOREMA 1. Sia $\Pi=(P,R,\omega,\equiv)$ un piano assoluto e siano a,b due punti distinti qualsiasi di P. Si ha allora:
i) per ogni retta R di R tale che $a\notin$ R si ha: $\tilde{a}(\mathrm{R})\cap \mathrm{R}=\emptyset$;
ii) per ogni punto x di P si ha: $\tilde{a}\circ\tilde{b}\,(x)\neq x$.

5.2 Nel piano euclideo, dal Teorema (1) e dalla definizione di traslazione (cfr. § 2.2) discende la proposizione seguente.

TEOREMA 2. Sia $\sum=(P,R,\omega,\equiv,/\!/)$ un piano euclideo, $\tilde{P}$ la totalità delle riflessioni di punto definite su $\sum$, (T, $\circ$) il gruppo delle traslazioni di $\sum$. Siano a,b due punti distinti qualsiasi. Si ha allora:
i) per ogni retta R di R si ha: $\tilde{a}\,(\mathrm{R})/\!/\mathrm{R}$;
ii) per ogni punto x di P si ha: $(\tilde{a}\circ\tilde{b}\,)(x)\neq x$;
iii) $\tilde{P}\circ\tilde{P}=\mathrm{T}$.

Dimostrazione. (i) e (ii) sono conseguenza immediata del Teorema (1). (iii) Da (i) e (ii) consegue $\tilde{P}\circ\tilde{P}\subset\mathrm{T}$. Viceversa per ogni traslazione τ diversa dall'identità, se $\underline{0}$ è un punto prefissato arbitrario, posto $x:=\tau(\underline{0})$, detto m il punto medio di $(\underline{0},x)$, ricordando la regolarità di T su P e poiché è $(\tilde{m}\circ\tilde{\underline{0}}\,)\,(\underline{0})=x=\tau(\underline{0})$, si ha: $\tau=\tilde{m}\circ\tilde{\underline{0}}$ e dunque $\mathrm{T}\subseteq\tilde{P}\circ\tilde{P}$.

Dal Teorema (2,iii), ricordando che le traslazioni di $\sum$ formano gruppo, discende che $(\tilde{P}\circ\tilde{P},\circ\,)$ è un gruppo e quindi, in particolare si ha:

[8] $$\tilde{P}\circ\tilde{P}\circ\tilde{P}=\tilde{P}\,.$$

Abbiamo ora tutti gli strumenti necessari per definire nuovamente la struttura algebrica $(P,+)$, già ottenuta al § 3.2, ma che viene ora definita senza richiamare esplicitamente le nozioni euclidee di parallelismo e traslazione.

Sia dunque $\underline{0}$ un punto prefissato arbitrario; per ogni punto $a\neq\underline{0}$ indichiamo con a' il punto medio di $(\underline{0},\ a)$. Porremo per definizione $\underline{0}':=\underline{0}$.

Sia ora τ una qualsiasi traslazione di T ; posto $a:=\tau(\underline{0})$, cioè in forza del Teorema (2) $a=(\tilde{a}'\circ\tilde{\underline{0}})\,(\underline{0})$, per ogni punto b di P definiamo

[9] $$a+b:=\tilde{a}'\circ\tilde{\underline{0}}\,(b)=\tau\,(b).$$

L'insieme P, rispetto alla legge di composizione "+" definita dalla [9] risulta essere un gruppo $(P,+)$ isomorfo a $(\tilde{P} \circ \tilde{P}, \circ)$.

E' importante osservare che per la definizione di somma data dalla [9] non sono state utilizzate le proprietà geometriche delle traslazioni, espresse mediante il parallelismo tra rette, ma ci si è basati solamente sulla proprietà espressa dalla proposizone (2,iii).

Analogamente a quanto si è fatto per la definizione di somma data dalla [4], anche alla somma assegnata dalla [9] si può associare un insieme di trasformazioni di P in sé, ponendo per ogni a di P:

$$[10] \qquad a^+ : \begin{cases} P \to P \\ x \to a^+(x) := a + x = \tilde{a}' \circ \tilde{\underline{0}}(x) = \tau(x), \end{cases}$$

cioè

$$a^+ := \tilde{a}' \circ \tilde{\underline{0}} = \tau.$$

Se si indica ancora $P^+ := \{\, a^+ \in \tilde{P} \circ \tilde{P} \mid a \in P \,\}$, ne consegue allora

$$[11] \qquad P^+ = \tilde{P} \circ \tilde{P} = \mathrm{T}$$

per cui $(P,+)$ risulta essere un gruppo isomorfo a $(T, \circ) = (P^+, \circ)$.

5.3 La procedura seguita nel procedimento del § 5.2 per assegnare struttura di gruppo all'insieme P dei punti di un piano euclideo è immediatamente generalizzabile al caso del piano assoluto Π.

Sia dunque $\Pi=(P,R,\omega,\equiv)$ un piano assoluto. Fissato un punto $\underline{0}$ arbitrario, per ogni punto $a \neq \underline{0}$ indichiamo con a' il punto medio di $(\underline{0},a)$ per cui quindi si ha $a = \tilde{a}'(\underline{0})$. Per definizione porremo anche $\underline{0}' := \underline{0}$. Il teorema di esistenza e unicità del punto medio di una qualsiasi coppia di punti di P, assicura che l'insieme delle riflessioni di punto $\tilde{P}$ è *transitivo* su P.

Siano ora a, b due punti qualsiasi di P; ricordando, per quanto detto, che $a = \tilde{a}'(\underline{0}) = \tilde{a}' \circ \tilde{\underline{0}}(\underline{0})$ definiamo

$$[12] \qquad a+b := \tilde{a}' \circ \tilde{\underline{0}}(b).$$

Analogamente a quanto si è fatto per le definizioni di somma date rispettivamente dalla [4] e dalla [9], anche alla somma assegnata dalla [12] si può associare un insieme di trasformazioni di P in sé, ponendo per ogni a di P:

$$[13] \qquad a^+ : \begin{cases} P \longrightarrow P \\ x \longrightarrow a^+(x) := a + x = \tilde{a}' \circ \tilde{\underline{0}}(x). \end{cases}$$

Scende di qui che $P^+ := \{\, a^+ \mid a \in P \,\} \subseteq \tilde{P} \circ \tilde{P} \subseteq M_+$ è regolare su P. Dalle convenzioni assunte si deduce che $\underline{0}^+$ coincide con l'applicazione identica; scriveremo $\underline{0}^+ = id$.

Ci proponiamo ora di studiare le proprietà della struttura algebrica $(P,+)$ definita mediante la legge di composizione "+" definita dalla [12].

TEOREMA 3. Sia $\Pi=(P,R,\omega,\equiv)$ un piano assoluto e "+" la legge di composizione definita dalla [12] su P. La struttura algebrica $(P,+)$ gode delle proprietà:
i) $\underline{0}$ è l'elemento neutro (cioè per ogni punto a: $a + \underline{0} = a = \underline{0} + a$);
ii) per ogni a, b, c le equazioni

$$a + x = b \,,\; y + c = b$$

ammettono ciascuna esattamente una soluzione;
iii) se Π non è un piano euclideo, esistono a, b, c di P tali che

$$a + (\, b + c \,) \neq (\, a + b \,) + c$$

(cioè l'operazione "+" non gode della *proprietà associativa*).

Una struttura algebrica $(P,+)$ che gode delle proprietà (i) e (ii) del Teorema (3) prende il nome di *cappio* (in inglese: *loop*), se vale anche la proprietà (iii) parleremo di *cappio proprio*, se invece la legge di composizione "+" è associativa, la struttura $(P,+)$ è un *gruppo*.

Osserviamo che, se a è un punto qualsiasi di P, e $(-a)$ è l'elemento definito (univocamente per il Teorema (3,ii)) dalla condizione $a + (-a) = \underline{0}$, si ha: $-a = \tilde{\underline{0}} \circ \hat{a}'(\underline{0}) = \tilde{\underline{0}}\,(a)$.

Come si è visto i gruppi costituiscono un caso particolare di cappio. Più precisamente si ha:

TEOREMA 4. Il cappio $(P,+)$ definito mediante la [12] è un gruppo, cioè la legge di composizione "+" è associativa, se e solo se valgono le seguenti condizioni equivalenti:
i) $\tilde{P} \circ \tilde{P} \circ \tilde{P} = \tilde{P}$;
ii) $P^{+} \circ P^{+} = P^{+}$;
iii) per ogni a, b di P si ha: $a^{+} \circ b^{+} = (a+b)^{+}$.

Osserviamo che la condizione (i) del Teorema (4) coincide con la [8] del § 5.2 che vale nell'ipotesi che il piano $(P,R,\omega,\equiv)$ sia euclideo. Quando vale la [8] si ha anche che $(P^{+},\circ)$, definito dalla [11], è un gruppo e quindi la condizione (ii) del Teorema (4) è soddisfatta.

Più precisamente la condizione (i) dal Teorema (4) caratterizza il caso euclideo, come è precisato dal seguente teorema.

TEOREMA 5. Sia $(P,R,\omega,\equiv)$ un piano assoluto continuo e $\tilde{P}$ la totalità delle riflessioni di punto in esso definite. Si ha allora

$$\tilde{P} \circ \tilde{P} \circ \tilde{P} = \tilde{P}$$

se e solo se $(P,R,\omega,\equiv)$ è un piano euclideo, cioè in R è assegnata una relazione di parallelismo che soddisfa l'assioma della parallela.

Vale infatti la seguente *classificazione dei piani assoluti*,[10] dovuta sostanzialmente al matematico danese J. Hjelmslev (1873,1950).

Sia $(P,R,\omega,\equiv)$ *un piano assoluto*. Diremo che

i) *il piano è singolare* se per ogni scelta dei punti a, b, c vale la condizione:

$$\tilde{a} \circ \tilde{b} \circ \tilde{c} \in \tilde{P};$$

ii) *il piano è ordinario* se esistono punti a, b, c tali che

$$\tilde{a} \circ \tilde{b} \circ \tilde{c} \notin \tilde{P}.$$

[10] Si veda per es. H. KARZEL, H.-J. KROLL, *Geschichte der Geometrie seit Hilbert*, Wissenscheftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1988, parte III, § 6.

In questo caso, si ha $\tilde{a} \circ \tilde{b} \circ \tilde{c} \in \tilde{P}$ se e solo se i punti sono allineati.

In ogni cappio (proprio) $(P,+)$ si può introdurre una opportuna funzione che assegna, in un certo senso, la misura di quanto la legge di composizione "+" si discosta dalla proprietà associativa. Precisamente, se a, b sono due punti qualsiasi di P, si definisce la funzione $\delta_{a,b}$ tale che, per ogni x di P, si ha:

[14] $$a + (b + x) = (a + b) + \delta_{a,b}(x).$$

E' evidente che $\delta_{a,b}$ è la funzione identica al variare di a e b se e solo se $(P,+)$ è un gruppo.

Dalla [14] discende subito che è

[15] $$\delta_{a,b} = ((a + b)^{+})^{-1} \circ a^{+} \circ b^{+}.$$

La funzione $\delta_{a,b}$ prende anche il nome di *funzione di precessione*.

La relazione [14] vale in un qualsiasi cappio (proprio) $(P,+)$; esistono invece proprietà specifiche valide nei cappi che provengono da piani assoluti Π secondo la procedura precedentemente illustrata e in cui la operazione di somma è assegnata mediante la definizione [12]. Si ha dunque:

TEOREMA 6. Sia $\Pi=(P,R,\omega,\equiv)$ un piano assoluto ordinario e $(P,+)$ la struttura di cappio assegnata mediante la [12]. Valgono allora per $(P,+)$ e per ogni scelta dei punti a, b, le seguenti proprietà:

i) $\delta_{a,b}(\underline{0}) = \underline{0}$;

ii) $\delta_{a,b} \in \mathrm{Aut}(P,+)$;

iii) $\delta_{a,b} = \delta_{a,b+a}$;

iv) $\tilde{\underline{0}} \in \mathrm{Aut}(P,+)$, cioè per ogni x, y di P si ha $-(x+y) = -x+(-y)$.

Un cappio che soddisfa le proprietà espresse dal Teorema (6) prende il nome di *cappio di Bruck* o anche *K-loop*.

In un cappio che soddisfa le ipotesi del Teorema (6), dalla [15], avendo posto $c := a+b$, si ha:

$$[16] \qquad \delta_{a,b} = \underline{\tilde{0}} \circ \tilde{c}' \circ \tilde{a}' \circ \underline{\tilde{0}} \circ \tilde{b}' \circ \underline{\tilde{0}}.$$

6. *La geometria dei K-loop.*

6.1 Abbiamo visto nel § 5.2 che ad un piano euclideo $\sum$ si può associare una struttura di gruppo $(P,+)$ definita sull'insieme P dei suoi punti. Se invece di $\sum$ consideriamo un piano assoluto proprio Π, la struttura $(P,+)$ che si può associare all'insieme P dei suoi punti è un K-loop che non è un gruppo se Π non è un piano euclideo (Teoremi (4) e (5)). La *funzione di precessione* $\delta_{a,b}$ definita con la formula [14] assegna in un certo senso la misura di quanto il relativo cappio differisce da un gruppo. Ci chiediamo allora se si possa trovare una analoga forma di misura di quanto un piano assoluto si discosta da uno euclideo e se queste due misure di *non-associatività* e *non-euclideicità* sono in qulche modo confrontabili.

Uno dei primi teoremi che si incontrano in geometria euclidea elementare riguarda la somma degli angoli interni di un triangolo. Esso afferma che «*in un piano euclideo la somma degli angoli interni di un triangolo è costante ed è uguale a due angoli retti*». Il teorema ora enunciato è estremamente importante perché riguarda una proprietà molto semplice che non vale in geometria assoluta, anzi caratterizza proprio il piano euclideo.

Più precisamente in un piano assoluto proprio $\Pi=(P,R,\omega,\equiv)$ *la somma degli angoli interni di un qualsiasi triangolo di vertici a, b, c* (scriveremo in simboli: $\Delta(a,b,c)$) è sempre minore di due angoli retti e differisce da tale valore per una ampiezza angolare $\delta\,(a,b,c)$ *che viene detta "difetto angolare" del triangolo.*[11] Il valore di $\delta\,(a,b,c)$ non è costante ma dipende dall'area del triangolo $\Delta(a,b,c)$ a cui si riferisce: più precisamente $\delta\,(a,b,c)$ cresce all'aumentare dell'area di $\Delta(a,b,c)$.

Ci ripromettiamo ora di calcolare il difetto angolare $\delta\,(u,v,w)$ di un generico triangolo $\Delta(u,v,w)$; potremo poi verificare che il valore della *funzione di precessione* $\delta_{a,b}$ introdotta con la [14] è uguale al difetto angolare di un opportuno triangolo legato ai punti a, b e al punto neutro $\underline{0}$.

[11] Si veda ad esempio E. AGAZZI, D. PALLADINO, *Le geometrie non euclidee*, *op. cit.*, cap. I, § 7.

6.2 Sia $\Delta(u,v,w)$ un triangolo generico di un piano assoluto $\Pi=(P,R,\omega,\equiv)$. Indichiamo con v^*, w^*, u^* rispettivamente i *punti medi* delle coppie (u,v), (u,w), (v,w) e denotiamo $\hat{u} :=\sphericalangle(v,u,w)$, $\hat{v} :=\sphericalangle(w,v,u)$, $\hat{w} :=\sphericalangle(u,w,v)$ gli angoli interni (orientati) del triangolo $\Delta(u,v,w)$. Poiché le riflessioni di punto $\tilde{v}^*$ e $\tilde{w}^*$ sono isometrie si ha:

$$\hat{v} \equiv \tilde{v}^*(\hat{v}) = \sphericalangle(\tilde{v}^*(w), u, v),$$

$$\hat{w} \equiv \tilde{w}^*(\hat{w}) = \sphericalangle(w, u, \tilde{w}^*(v)).$$

Ne consegue quindi

$$\hat{v} + \hat{u} + \hat{w} \equiv \sphericalangle(\tilde{v}^*(w), u, \tilde{w}^*(v))$$

e se $\theta(u,v,w)$ è il *difetto angolare* di $\Delta(u,v,w)$ cioè l'angolo tale che

$$\hat{v} + \hat{u} + \hat{w} + \theta(u,v,w) = 2 \text{ retti}$$

si ricava che

[17] $$\theta(u,v,w) \equiv \sphericalangle(\tilde{w}^*(v), u, (\tilde{u} \circ \tilde{v}^*)(w)).$$

Si consideri ora la funzione

[18] $$\delta_{u;v,w} := \tilde{u} \circ \tilde{v}^* \circ \tilde{u}^* \circ \tilde{w}^*.$$

Per essa valgono le seguenti prorietà (che si possono riconoscere con un calcolo diretto):

[18'] $$\delta_{u;v,w}(\tilde{w}^*(v)) = \tilde{u} \circ \tilde{v}^*(w),$$

[18''] $$\delta_{u;v,w}(u) = u,$$

[18'''] $$\delta_{u;v,w} \in \tilde{R}^8 \subset \mathrm{M}_+.$$

Da [18'''] e [18''] scende che $\delta_{u;v,w}$ è una *rotazione* che ha u come punto unito (*centro della rotazione*). Da [18'] consegue che l'angolo di rotazione è uguale esattamente all'angolo $\theta\,(u,v,w)$ dato dalla [17].

La funzione [18] viene dunque detta *funzione difetto angolare* e offre, per quanto detto, una *misura del difetto angolare* del triangolo $\Delta(u,v,w)$.

6.3 Siano a, b due punti qualsiasi del piano assoluto $\Pi=(P,R,\omega,\equiv)$, tra loro distinti e non allineati con $\underline{0}$.

Intendiamo ora calcolare il valore della funzione difetto angolare $\delta_{0;c,-b}$ relativa al triangolo $\Delta(\underline{0},c,-b)$, dove si è posto $c:=a+b$.

Poiché si ha

$$c := a+b = a^+(b) = \tilde{a}' \circ \tilde{\underline{0}}\,(b) = \tilde{a}'(-b)$$

risulta a' punto medio della coppia $(-b,c)$; denotiamo inoltre rispettivamente c' e $(-b)'$ i punti medi delle coppie $(\underline{0},c)$ e $(\underline{0},-b)$. D'altra parte, poiché $(-\tilde{b})'(\underline{0}) = -b = \tilde{\underline{0}} \circ \tilde{b}' \circ \tilde{\underline{0}}\,(\underline{0})$, per la regolarità di $\tilde{P}$ discende $(-\tilde{b})' = \tilde{\underline{0}} \circ \tilde{b}' \circ \tilde{\underline{0}}$.

Ricordando allora [16] e [18] si ha:

$$\delta_{0;c,-b} = \tilde{\underline{0}} \circ \tilde{c}' \circ \tilde{a}' \circ (-\tilde{b})' = \tilde{\underline{0}} \circ \tilde{c}' \circ \tilde{a}' \circ \tilde{b}' \circ \tilde{\underline{0}} = \delta_{a,b}$$

cioè il valore della *funzione di precessione* legata ai punti a, b dalla relazione [14] è uguale al valore della *funzione difetto angolare* relativa al triangolo $\Delta(\underline{0},a+b,-b)$, e questo fatto risponde al quesito che si è posto nel § 6.1.

Mario Marchi

RIASSUNTO

La geometria, razionalizzazione delle più comuni esperienze sensoriali che provengono dallo spazio fisico di cui facciamo parte, è scienza che si esprime con un linguaggio il cui livello di astrazione e formalizzazione si evolve al crescere della riflessione critica e dell'approfondimento conoscitivo della disciplina. Le coordinate cartesiane, e successivamente le nozioni più astratte di spazio vettoriale e algebra lineare, costituiscono lo strumento formale naturale per la descrizione della geometria euclidea elementare. La geometria non eu-

clidea iperbolica è razionalizzabile con uno strumento algebrico più astratto, noto con il nome di "k-loop", che della nozione di spazio vettoriale costituisce una naturale evoluzione concettuale. In questa nota viene introdotta in modo elementare la nozione algebrica di "k-loop", confrontandola con quella di spazio vettoriale ed esaminando la sua adeguatezza nella descrizione dello spazio non-euclideo iperbolico.

Finito di stampare
nel mese di Dicembre 2004
presso
il Poligrafico Mucchi di Modena